

حركة دوران جسم صلب حول محور ثابت

I - الأفصول الزاوي - السرعة الزاوية (تذكير)

يكون جسم صلب ، غير قابل للتشويه ، في حركة دوران حول محور ثابت (Δ) إذا كانت جميع نقطه في حركة دائرية ممركة على هذا المحور باستثناء النقط المنتمية للمحور (Δ) .
نحدد موضع نقطة متحركة من الجسم ، في مرجع أرضي نعتبره غاليليا في لحظة t بالأفصول الزاوي .

1 - الأفصول الزاوي

الأفصول الزاوي للنقطة المتحركة M من جسم صلب في حركة دوران حول محور ثابت (Δ) هو

الزاوية الموجهة θ بحيث : $\theta = (\overline{Ox}, \overline{OM})$ بحيث

أن \overline{Ox} محورا مرجعيا (أصل الأطوار)

والمسار الدائري للنقطة المتحركة موجهها في منحنى الحركة والذي نعتبره موجبا .

وحدة الأفصول الزاوي في النظام العالمي للوحدات هي الرديان rad .

خلال حركة دوران الجسم الصلب حول المحور (Δ) يتغير الأفصول الزاوي مع الزمن t أي أنه دالة

زمنية $\theta(t)$.

2 - السرعة الزاوية $\dot{\theta}$

نعتبر أنه خلال حركة دوران الجسم الصلب حول

المحور (Δ) ، أنه في اللحظة t_i تحتل النقطة M الموضع M_i .

نعتبر لحظتين جد متقاربتين t_{i-1} و t_{i+1} تؤطران اللحظة t_i ، في هذه الحالة تساوي السرعة الزاوية

للنقطة M في اللحظة t_i السرعة المتوسطة للنقطة M بين اللحظتين t_{i-1} و t_{i+1} وهي :

$$\dot{\theta} = \frac{\theta(t_{i+1}) - \theta(t_{i-1})}{t_{i+1} - t_{i-1}}$$

$\theta(t_{i+1})$ الأفصول الزاوي للنقطة M في اللحظة t_{i+1}

$\theta(t_{i-1})$ الأفصول الزاوي للنقطة M في اللحظة t_{i-1}

نضع $\Delta t = t_{i+1} - t_{i-1}$ و $\Delta \theta = \theta(t_{i+1}) - \theta(t_{i-1})$

إذا كانت t_{i-1} و t_{i+1} جد متقاربتين ، فإن Δt تنهاى

نحو الصفر وبالتالي ستكون عندنا :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \theta}{\Delta t} \right) = \frac{d\theta}{dt}$$

المشتقة الأولى بالنسبة للزمن للأفصول الزاوي

في اللحظة t_i .

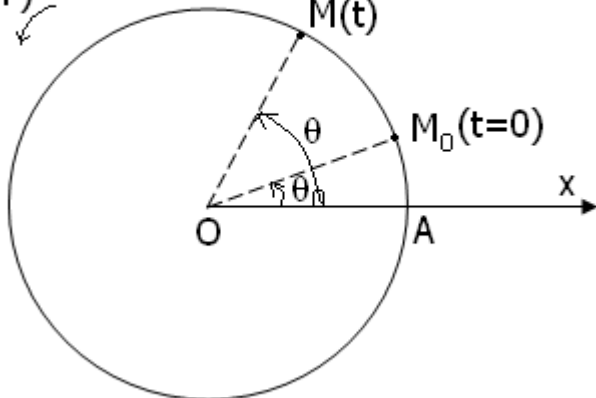
وحدة السرعة الزاوية في النظام العالمي للوحدات

هي rad / s

يرتبط الأفصول الزاوي والأفصول المنحني $s(t)$ في كل لحظة بالعلاقة التالية : $s(t) = r \cdot \theta(t)$

منحنى الحركة

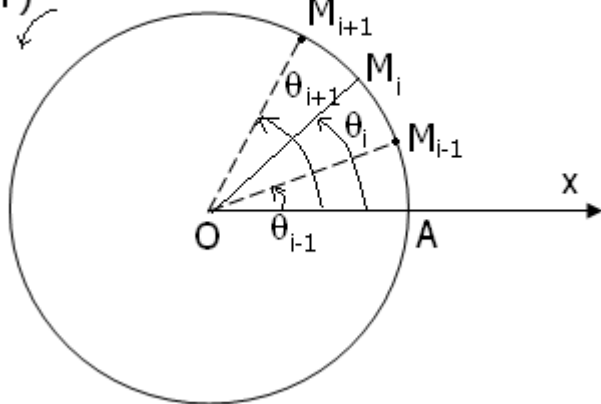
(+)



الأفصول الزاوي $\theta = (\overline{Ox}, \overline{OM})$

منحنى الحركة

(+)



ومنه نستنتج العلاقة بين السرعة اللحظية للنقطة M $v(t) = \dot{s}(t)$ (السرعة الخطية) والسرعة الزاوية

$$v(t) = r\dot{\theta}(t) : \dot{\theta}(t)$$

3 - التسارع الزاوي $\ddot{\theta}(t)$

أ - تعريف

لتكن $\dot{\theta}(t_i)$ السرعة الزاوية لنقطة M من جسم صلب في حركة دوران حول محور ثابت في لحظة t_i بحيث مؤطرة بلحظتين جد متقاربتين t_{i-1} و t_{i+1} بحيث أن $\dot{\theta}(t_{i+1})$ السرعة الزاوية للنقطة M في اللحظة t_{i+1} و $\dot{\theta}(t_{i-1})$ السرعة الزاوية للنقطة M في اللحظة t_{i-1}

عندما تتناهى $\Delta t = t_{i+1} - t_{i-1}$ نحو الصفر يتناهى خارج القسمة $\frac{\Delta\dot{\theta}}{\Delta t} = \frac{\dot{\theta}(t_{i+1}) - \dot{\theta}(t_{i-1})}{t_{i+1} - t_{i-1}}$ إلى المشتقة

بالنسبة للزمن للسرعة الزاوية أي أن :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\dot{\theta}(t_{i+1}) - \dot{\theta}(t_{i-1})}{t_{i+1} - t_{i-1}} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \ddot{\theta}(t_i)$$

وحدة التسارع الزاوي في النظام العالمي للوحدات هي rad/s^2

تمرين تطبيقي :

1 - السرعة الزاوية لنقطة متحركة M من جسم صلب في دوران حول محور ثابت هي $\dot{\theta} = 10 \text{ rad/s}$.

أ - أحسب التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ لهذه النقطة .

ب - ما طبيعة حركة النقطة M ؟

ج - أكتب تعبير الأفصول الزاوي θ بدلالة الزمن t علما أن الأفصول الزاوي عند أصل التواريخ هو $\theta_0 = 2 \text{ rad}$.

2 - تعبير الأفصول الزاوي لنقطة N من جسم صلب في دوران حول محور ثابت هو :

$$\theta(t) = 10t^2 + 40t + 6 \text{ (rad)}$$

أ - أوجد تعبير السرعة الزاوية بدلالة الزمن .

ب - أوجد تعبير التسارع الزاوي بدلالة الزمن .

ج - ما طبيعة حركة النقطة N ؟

ب - المركبتان a_T و a_N في أساس فريني .

لدينا في أساس فريني : $\vec{a} = a_T \vec{u} + a_N \vec{n}$ بحيث أن

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \text{ و } a_T = \frac{dv}{dt}$$

s الأفصول المنحني للنقطة M في لحظة t و $v = \frac{ds}{dt}$

السرعة الخطية للنقطة M في اللحظة t و ρ شعاع

انحناء المسار في اللحظة t .

حسب تعريف الدوران لجسم صلب حول محور ثابت ،

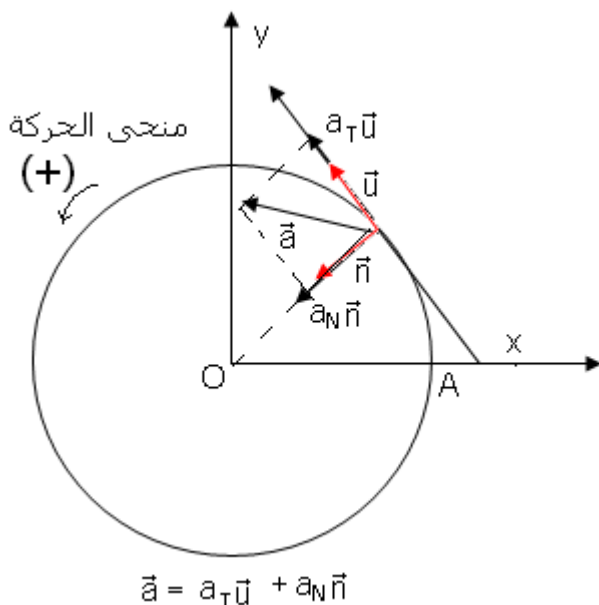
فإن مسار كل نقطة متحركة من الجسم دائريا ממركزا

على محور الدوران وبالتالي يكون اتجاه المتجهة

الواحدية \vec{n} نحو النقطة O مركز الدائرة ويكون شعاع

الانحناء مساويا لشعاع الدائرة r .

نعلم أن $s = r\theta$ وأيضا $\dot{s} = r\dot{\theta}$ ومنه فإن



$$\vec{a} = a_T \vec{u} + a_N \vec{n}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = r \cdot \frac{d\theta}{dt} = r \cdot \dot{\theta}$$

$$a_N = \frac{(r\dot{\theta})^2}{r} = r(\dot{\theta})^2$$

ولدينا كذلك $\rho = r$ أي أن

II - العلاقة الأساسية للتحرّك في حالة دوران جسم حول محور ثابت .

تخص هذه العلاقة كل جسم صلب خاضع لتأثيرات ميكانيكية في دوران حول محور ثابت .

1 - نص العلاقة

في معلم مرتبط بجسم مرجعي أرضي ، بالنسبة لمحور ثابت (Δ) يساوي مجموع عزوم القوى المطبقة على جسم صلب في

دوران حول محور ثابت (Δ) في كل لحظة ، جداء عزم القصور J_Δ والتسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ للجسم في اللحظة المعينة :

$$\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i) = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$$

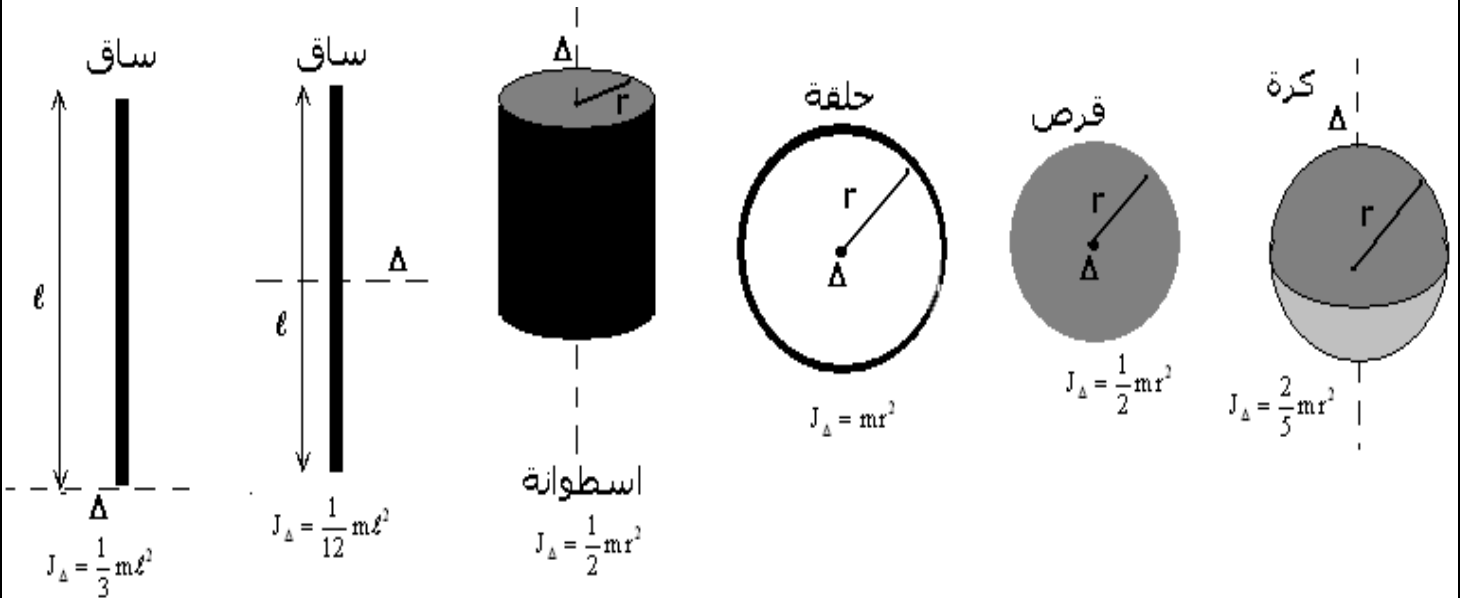
على الجسم الصلب $(N.m)$ مجموع العزوم بالنسبة للمحور Δ للقوى المطبقة

عزم قصور الجسم الصلب بالنسبة للمحور (Δ) نعبّر عنه ب J_Δ $kg.m^2$

$\ddot{\theta}$ التسارع الزاوي نعبّر عنه ب rad/s^2

2 - تعابير عزم القصور لأجسام متجانسة ذات أشكال هندسية بسيطة .

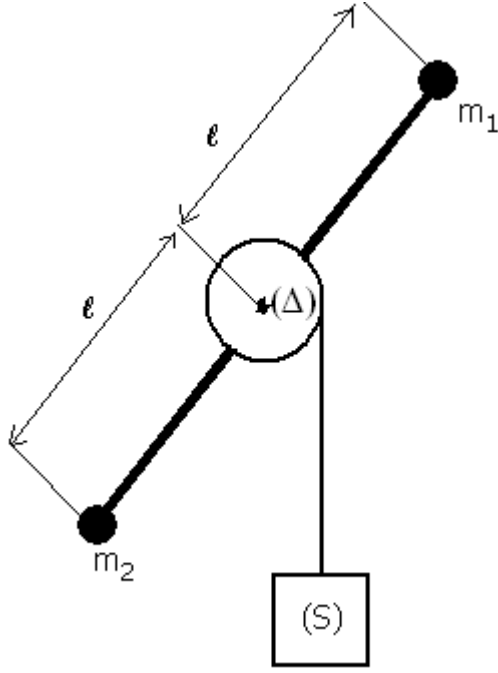
عزم قصور J_Δ لجسم صلب يميز حركة دوران الجسم حول المحور (Δ)



حالتان خاصتان :

إذا كان التسارع الزاوي منعدما $\ddot{\theta} = 0$ فإن حركة الجسم الصلب حول المحور Δ حركة دورانية منتظمة .
 إذا كان التسارع الزاوي ثابتا تكون حركة الجسم الصلب حول المحور Δ حركة دورانية متغيرة بانتظام .

III - تطبيق : حركة مجموعة ميكانيكية في حالة إزاحة ودوران حول محور ثابت .
 نعتبر أسطوانة متجانسة شعاعها $r=10\text{cm}$ وكتلتها $m=1\text{kg}$ يمكنها الدوران حول محور ثابت (Δ) حيث يمر بمركزها ساق T ثبت في طرفيه جسمين نقطيين كتلتها



$m_1 = m_2 = 0,5\text{kg}$ ، يوجد مركز قصورهما على نفس

المسافة $\ell = 50\text{cm}$ من المحور (Δ) . تحمل الأسطوانة

جسما (S) كتلته $m' = 10\text{kg}$ ، بواسطة حبل ملفوف حولها

نعتبره غير قابل الامتداد وكتلته مهملة.

نترك المجموعة بدون سرعة بدئية ، علما أن الاحتكاكات

مهملة وكذلك كتلة الساق .

1 - أوجد التسارع a للجسم (S) وتوتر الحبل أثناء الحركة
 2 - عين السرعة الزاوية للأسطوانة عندما يقطع الجسم

مسافة $h = 5\text{m}$. نعطي $g = 10\text{m/s}^2$

تمرين 3

ندير قرصا متجانسا ، كتلته $m = 10\text{kg}$ وشعاعه $r = 10\text{cm}$ ،

حول محوره إلى أن تصير سرعة دورانه 400 دورة في الدقيقة ،

تم نتركه

نلاحظ أن القرص يتوقف عن الدوران بعد ثلاث دقائق تحت تأثير

الاحتكاك الذي نقرن به مزدوجة ، نعتبر عزمها ثابتا .

1 - أحسب التسارع الزاوي للقرص .

2 - استنتج عزم المزدوجة المقاومة للحركة وعدد الدورات التي ينجزها القرص قبل أن يتوقف .

الجواب :

1 - نقوم بدراسة حركة القرص انطلاقا من حصوله على السرعة الزاوية $\omega_0 = \frac{2\pi \times 400}{60} = 41,8\text{rad/s}$

إلى أن يتوقف أي أن سرعته الزاوية منعدمة . حركة القرص في هذه المرحلة حركة دائرية متغيرة

بانتظام ، يمكن أن نبين ذلك بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك :

$$\sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta} \Rightarrow \mathcal{M}_C = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\mathcal{M}_C}{J_{\Delta}} = \text{cte}$$

أي أن المعادلة الزمنية لهذه الحركة هي : $\theta(t) = \frac{1}{2} \ddot{\theta} t^2 + \omega_0 t$ ومعادلة السرعة كذلك هي :

$$\dot{\theta}(t) = \ddot{\theta} t + \omega_0$$

عند انعدام السرعة الزاوية لدينا : $\ddot{\theta} t + \omega_0 = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{\omega_0}{t}$

$$\ddot{\theta} = -\frac{\omega_0}{t} = -\frac{41,8}{3 \times 60} = -0,23\text{rad/s}^2$$

2 - حساب عزم المزدوجة المقاومة :

$$\mathcal{M}_C = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta} \quad \text{بحيث أن } J_{\Delta} = \frac{1}{2} m r^2 = 0,05\text{kg} \cdot \text{m}^2 \quad \text{وبالتالي فإن } \mathcal{M}_C = -0,0115\text{N} \cdot \text{m}$$

حساب عدد الدورات المنجزة قبل أن يتوقف :

$$\theta = -0,23(180)^2 + 41,8(180) = 72\text{rad} \quad \text{لدينا } \theta = -0,23t^2 + 41,8t$$

$$\theta = 2\pi n \Rightarrow n = \frac{\theta}{2\pi} = 11,5$$