تصحيح الفرض المنزلي الأول
الأولى بكالوريا علوم رياضية
2007 ـ2008

تمرين 1

I ـ ينطلق الجسم من النقطة A بدون سرعة بدئية وباعتبار أن الاحتكاكات مهملة في الجزء AB :

1 ـ جرد القوى المطبقة على الجسم :

$\vec{P}$ وزن الجسم

$\vec{R}$ تأثير السكة على الجسم

2 ـ تعبير شغل القوى المطبقة على الجسم عند انتقاله من A نحو B .

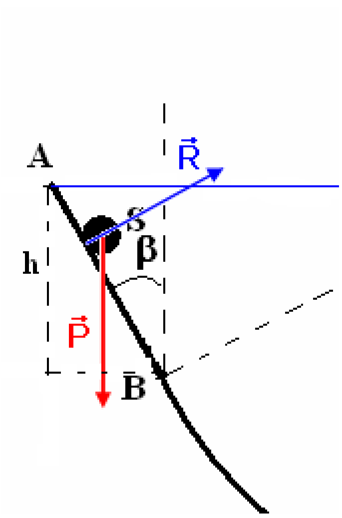
$$\sum \underset{A\to B}{W}\left(\vec{F}_i\right) = \underset{A\to B}{W}\left(\vec{P}\right) + \underset{A\to B}{W}\left(\vec{R}\right)$$

$\vec{R}$ عمودية على السطح لكون الاحتكاكات مهملة .

$$\underset{A\to B}{W}\left(\vec{R}\right) = 0$$

$$\underset{A\to B}{W}\left(\vec{P}\right) = mgh$$

$$h = r\sin\beta$$



وبالتالي $\sum \underset{A\to B}{W}\left(\vec{F}_i\right) = mg\ell\cos\beta$

نستنتج تعبير السرعة في النقطة B :

نطبق مبرهنة الطاقة الحركية على الجسم عند انتقاله من A نحو B

$$\frac{1}{2}mV_B^{\,2} - \frac{1}{2}mV_A^{\,2} = mg\ell\cos\beta$$

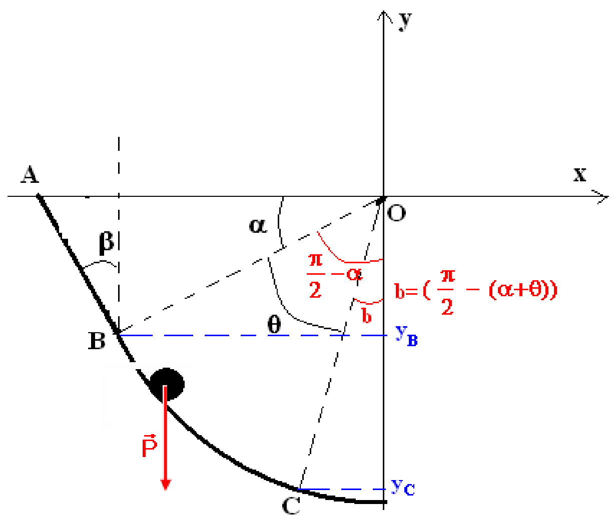
$$V_A = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mV_B^{\,2} = mg\ell\cos\beta$$

وبالتالي

$$V_B = \sqrt{2g\ell\cos\beta}$$

تطبيق عددي : $V_B = 2,28\,m/s$

II ـ في الجزء $\overset{\frown}{BC}$ نريد أن نحسب شغل وزن الجسم بطريقتين مختلفتين . الطريقة الأولى وهي استعمال إحداثيات وزن الجسم ومتجهة الانتقال في معلم ديكارتي $\mathcal{R}\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.



1 ـ تعبير شغل وزن الجسم عند انتقاله من B إلى C

باستعمال إحداثيات المتجهة $\vec{P}$ ومتجهة الانتقال $\overrightarrow{BC}$ في معلم ديكارتي $\mathcal{R}\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ بدلالة y_c, y_B, m, g .

$$\underset{B\to C}{W}\left(\vec{P}\right) = \vec{P}.\overrightarrow{BC}$$

في المعلم $\mathcal{R}\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ نكتب :

$$\vec{P}\begin{pmatrix}0\\-mg\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}x_c - x_B\\ y_C - y_B\end{pmatrix}$$

وبالتالي :

$$\underset{B\to C}{W}\left(\vec{P}\right) = -mg\left(y_c - y_B\right) = mg\left(y_B - y_C\right) > 0$$

$$y_B - y_C = H$$

وحسب الشكل لدينا $H = r\cos b - r\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$$H = r\cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\theta)\right) - r\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$H = r\sin(\alpha+\theta) - r\sin\alpha$$

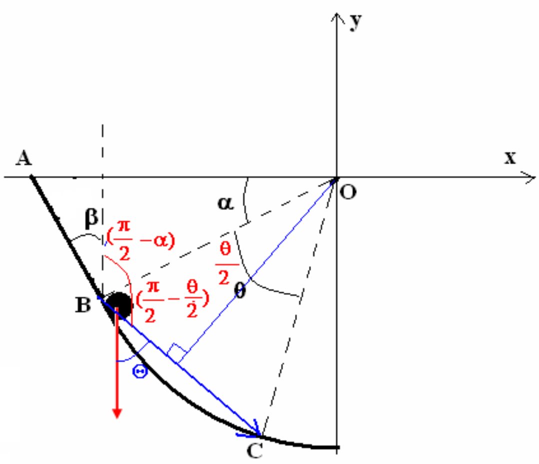
$$(1)\quad \underset{B\to C}{W}\left(\vec{P}\right) = mgr\left(\sin(\alpha+\theta) - \sin\alpha\right)$$

تطبيق عددي : $\underset{B\to C}{W}\left(\vec{P}\right) = 0,457J$ (يجب تصحيح خطأ في المعطيات $r = 52cm$ عوض $r = 60cm$)

3 ــ الطريقة الثانية وهي باستعمال خاصية الجداء السلمي $\vec{u}.\vec{v} = u.v.\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$:

تعبير شغل وزن الجسم عند انتقال الجسم من B إلى C بدلالة m, g, r, θ, α.

بناء على الشكل جانبه وباعتماد خاصية الجداء السلمي :



$$\underset{B\to C}{W}\left(\vec{P}\right) = \vec{P}.\overrightarrow{BC}$$

$$\underset{B\to C}{W}\left(\vec{P}\right) = mg.BC.\cos\left(\widehat{\vec{P},\overrightarrow{BC}}\right) = mg.BC.\cos\Theta$$

المثلث OBC متساوي الأضلاع بحيث أن :

$$\Theta = \pi - \frac{\pi}{2} + \alpha - \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} = \alpha + \frac{\theta}{2} \quad \text{و} \quad BC = 2r\sin\frac{\theta}{2}$$

وبالتالي :

$$(2)\quad \underset{B\to C}{W}\left(\vec{P}\right) = 2mg.r\sin\frac{\theta}{2}.\cos\left(\alpha + \frac{\theta}{2}\right)$$

تطبيق عددي : $\underset{B\to C}{W}\left(\vec{P}\right) = 0,457J$

4 ــ باستعمال العلاقات المثلثية نبين أن التعبير المحصل عليه في السؤالين السابقين هو نفسه :

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

لنبين أن $\sin(\alpha+\theta) - \sin\alpha = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\left(\alpha + \frac{\theta}{2}\right)$

$$\sin\alpha = \sin\left(\left(\frac{\theta}{2} + \alpha\right) - \frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\theta}{2} + \alpha\right)\cos\frac{\theta}{2} - \cos\left(\frac{\theta}{2} + \alpha\right)\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\sin(\alpha+\theta) = \sin\left(\left(\alpha + \frac{\theta}{2}\right) + \frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\theta}{2} + \alpha\right)\cos\frac{\theta}{2} + \cos\left(\frac{\theta}{2} + \alpha\right)\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\sin(\alpha+\theta) - \sin\alpha = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} + \alpha\right)\sin\frac{\theta}{2}$$

III ــ نعتبر أن الاحتكاكات غير مهملة في الجزء $\overset{\frown}{BC}$ وأن قوة الاحتكاك تبقى ثابتة في هذا الجزء .

1 ــ لنبين أن تعبير شغل القوة $\vec{R}$ المقرونة بتأثير السكة على الجسم هو على الشكل التالي :

$$\underset{A\to B}{W}\left(\vec{R}\right) = -f.\overset{\frown}{BC}$$

عند وجود الاحتكاكات يمكن تفكيك القوة $\vec{R}$ إلى $\vec{R}_N$ و $\vec{R}_T = \vec{f}$ وبالتالي $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{f}$

في هذه الحالة فشغل القوة $\vec{R}$ هو كالتالي :

$$\underset{A\to B}{W}\left(\vec{R}\right)=\underset{A\to B}{W}\left(\vec{R}_N\right)+\underset{A\to B}{W}\left(\vec{f}\right)$$

$$\underset{A\to B}{W}\left(\vec{R}_N\right)=0$$

$$\underset{A\to B}{W}\left(\vec{R}\right)=\underset{A\to B}{W}\left(\vec{f}\right)$$

وبما أن $\vec{f}$ قوة ثابتة وتقاوم الحركة فشغلها مقاوم : $\underset{A\to B}{W}\left(\vec{R}\right)=\underset{A\to B}{W}\left(\vec{f}\right)=-f.\overset{\frown}{BC}$ (أنظر الدرس)

لا يمكن تطبيق الطريقة الثانية وهي خاصية الجداء السلمي لأن المسار منحنى والقوة تغير اتجاهها في كل لحظة أي ليست بقوة محافظية كوزن الجسم أي أن شغلها يتعلق بشكل المسار المتبع خلال الحركة .

2 ـ سرعة الجسم في النقطة C في هذه الحالة :

نطبق مبرهنة الطاقة الحركية على الجسم عند انتقاله من B نحو C :

$$\frac{1}{2}mV_C{}^2-\frac{1}{2}mV_B{}^2=\underset{B\to C}{W}\left(\vec{P}\right)+\underset{B\to C}{W}\left(\vec{R}\right)$$

$$\frac{1}{2}mV_C{}^2-\frac{1}{2}mV_B{}^2=mgr\left(\sin\left(\alpha+\theta\right)-\sin\alpha\right)-f.\overset{\frown}{BC}$$

$$V_C{}^2=V_B{}^2+2gr\left(\sin\left(\alpha+\theta\right)-\sin\alpha\right)-\frac{2f.\overset{\frown}{BC}}{m}$$

$$\overset{\frown}{BC}=r\theta$$

$$V_C{}^2=V_B{}^2+2gr\left(\sin\left(\alpha+\theta\right)-\sin\alpha\right)-\frac{2f.r\theta}{m}$$

ماهي قيمة شدة قوة الاحتكاك لكي يصل الجسم إلى النقطة C بسرعة منعدمة ؟

$V_C=0$ وبالتالي تصبح العلاقة السابقة على الشكل التالي :

$$\frac{2f.r\theta}{m}=V_B{}^2+2gr\left(\sin\left(\alpha+\theta\right)-\sin\alpha\right)\Rightarrow f=\frac{mV_B{}^2}{2r\theta}+\frac{mgr\left(\sin\left(\alpha+\theta\right)-\sin\alpha\right)}{r\theta}$$

$$f=\frac{mV_B{}^2}{2r\theta}+\frac{\underset{B\to C}{W}\left(\vec{P}\right)}{r\theta}$$

يلاحظ انه لكي يتوقف الجسم نحتاج إلى قوة احتكاك جد مهمة .

تمرين 2

1 ـ التعبير عن شغل القوة T :

نطبق مبرهنة الطاقة الحركية بين لحظة انطلاق الجسم C بدون سرعة بدئية ولحظة ما :

$$E_C(C)_t-E_C(C)_0=W(\vec{P})+W(\vec{T})$$

$$E_C(C)_0=0$$

$$W(\vec{T})=E_C(C)_t-W(\vec{P})$$

تعبير شغل وزن الجسم :

$W(\vec{P})=mg\Delta x$ حيث أن Δx هي المسافة التي انتقل بها الجسم في المنحى الموجب بين اللحظتين t_0 و t .

خلال هذا الانتقال تنجز البكرة $\overset{\frown}{\Delta\ell}=r\Delta\theta\Rightarrow\overset{\frown}{\Delta\ell}=2\pi nr$ وبما أن الخيط لاينزلق على البكرة وغير قابل الامتداد فإن $\overset{\frown}{\Delta\ell}=\Delta x$ وبالتالي فإن $W(\vec{P})=2\pi r\times n\times m\times g$

$$W(T)=E_C(C)_t-2\pi\times n\times r\times mg$$

2 ـ التعبير عن شغل القوة $\vec{T}'$

نطبق مبرهنة الطاقة الحركية على الأسطوانة بين اللحظتين t_0 و t :

$$E_C(S)_t - E_C(S)_t = W(\vec{P}') + W(\vec{T}') + W(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$$

$$E_C(S)_0 = 0, W(\vec{P}') = 0, W(\vec{R}) = 0$$

$$W(\vec{T}') = E_C(S)_t - W(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$$

$$W(\vec{T}') = E_C(S)_t - \mathcal{M}_f.\Delta\theta \Rightarrow W(\vec{T}') = E_C(S)_t - \mathcal{M}_f.2\pi n$$

3 ـ لنبين العلاقة المطلوبة :

$$E_C(C)_t - 2\pi rn.mg = -E_C(S)_t + 2\pi n\mathcal{M}_f$$

$$E_C = E_C(C)_t + E_C(S)_t = 2\pi n\left(mgr + \mathcal{M}_f\right)$$

$$E_C = 2\pi n\left(mgr + \mathcal{M}_f\right)$$

4 ـ مبيانيا لدينا المعادلة المستقيم الذي يمر من أصل نظمة المحورين : $E_C = 0,125n$

من العلاقة السابقة نستنتج أن

$$\mathcal{M}_f = \frac{E_C}{2\pi n} - mgr = \frac{0,125}{2\pi} - mgr$$

$$\mathcal{M}_f = -0,02N.m$$